• $\phi(-0)=\phi(0)$

• $\forall x\neq 0,\ \phi(-x)=\dfrac{g(-x)}{-x}=\dfrac{-g(x)}{-x}=\dfrac{g(x)}{x}=\phi(x)$

donc ϕ est une fonction paire.

b) • ϕ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de deux fonctions continues. ($g=f^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme étant la réciproque d'une fonction continue).

• ***Continuité de ϕ en 0*** :

$\lim\limits_{x\to 0}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=1=\phi(0)\ \Rightarrow\ \phi$ est continue en 0.

Conclusion : ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.

c) • ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de fonctions dérivables.

• ***Dérivabilité de ϕ en 0*** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-x}{x^2}=0.$$

Conclusion : ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

d) On a : $\forall x\in\mathbf{R}:\ -\dfrac{\pi}{2}<g(x)<\dfrac{\pi}{2}$ d'où $|\phi(x)|=\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\leq\dfrac{\pi}{2|x|}$.

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi}{2|x|}=0$ d'où $\lim\limits_{x\to-\infty}\varnothing=\lim\limits_{x\to+\infty}\varnothing=0$

Solution 19 :

1°/

a) Les fonctions $x\mapsto\sqrt{\sin 2x}$ et $x\mapsto\dfrac{1}{\sin x}$ sont dérivables sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$

donc f est dérivable sur $]0,\dfrac{\pi}{2}[$ comme produit de ces deux fonctions .

• $$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\frac{\sqrt{\sin(2x)}}{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}$$